TEOREMAS DE CONSERVACIÓN

Entendemos por lei ou teorema de conservación unha ecuación que dá o balance do total dunha magnitude física aditiva no espacio (extensiva) contida nun volumen V fixo, incluindo as posibles fontes ou sumidoiros, e o fluxo desta magnitude a través da superficie S que o limita (fig. 2.1). Estas magnitudes serán a enerxía U, o momento lineal $\mathbf{p}$ e o momento angular $\mathbf{L}$.

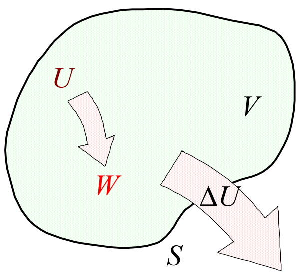

Fig. 2.1

ENERXÍA ELECTROMAGNÉTICA

Se nas ecuaciós de Maxwell

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

multiplicamos escalarmente a primeira por $\mathbf{H}$ e a segunda por $\mathbf{E}$ e restamos,

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) - \mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H}) = -\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_f\,,$$

integramos nun volumen fixo V e aplicamos o teorema de Gauss ó primeiro membro, queda:

$$\oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{a} = -\int_V \left(\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right) dv - \int_V \mathbf{J}_f\cdot\mathbf{E}\, dv \qquad (2.1)$$

O término

$$P = \frac{dW}{dt} = \int_V \mathbf{J}_f\cdot\mathbf{E}\, dv \qquad (2.2)$$

é o traballo neto[1] que fai o campo electromagnético sobre as cargas libres por unidade de tempo, ou sea a potencia perdida polo campo electromagnético.

Antes de nada, consideremos unha situación de campos estáticos. As derivadas dos campos son nulas, logo

$$\oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{a} = -\int_V \mathbf{J}_f\cdot\mathbf{E}\, dv \qquad (2.3)$$

Neste caso o *estado* do volumen non cambia e polo tanto tampouco cambia a enerxía (electromagnética ou doutro tipo) que contén. O segundo membro, debido a que aparece con signo negativo, é a potencia que *o exterior dá ó volumen*, logo a integral de superficie de $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ é a potencia que sale do sistema *pola superficie*.

[1] Este término tén sentido de *potencia disipada*, é dicir, que deixa de ser enerxía electromagnética pra converterse noutra forma de enerxía, normalmente calor. O campo magnético non fai traballo, xa que a forza magnética é perpendicular á velocidade. As posibles aportaciós de potencia externas, debidas a forzas electromotrices, darán unha contribución negativa a este término.

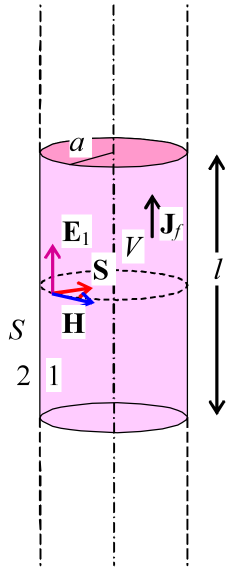

Fig. 2.2

Exemplo 2.1

Sea un conductor recto, con sección circular de radio a, e conductividade finita σ uniforme, conducindo unha corrente I. Consideremos un volumen V limitado pola superficie S (fig. 3). O campo $\mathbf{H}$ na superficie do conductor é

$$\mathbf{H}\big|_S = \frac{I}{2\pi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{a}$$

Pola lei de Ohm microscópica, no conductor, incluida a superficie, existirá un campo eléctrico na dirección z:

$$\mathbf{E}_1\big|_S = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \hat{\mathbf{z}}\frac{I}{\pi a^2 \sigma},$$

Na cara externa da superficie, polas condiciós de contorno de $\mathbf{E}$, o campo eléctrico será

$$\mathbf{E}_2\big|_S = \hat{\mathbf{z}}\frac{I}{\pi a^2 \sigma} + \hat{\zeta}\frac{\sigma_f}{2\varepsilon_0}$$

cunha compoñente radial debida á densidade superficial de carga libre [2] σ_f que crea o campo no conductor, pero que non afectará ós nosos cálculos.

Usando $\mathbf{E}_1$, por exemplo, temos o vector de Poynting

$$\mathbf{S}\big|_S = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H} = -\hat{\zeta}\frac{I^2}{2\pi^2 \sigma a^3}$$

e integrando sobre S,

$$\oint_S (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} = -\frac{I^2 l}{\sigma \pi a^2}$$

Daría o mesmo resultado integrar $\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}$. O segundo membro da ecuación é a potencia I^2R disipada por efecto Joule no volumen, de resistencia R. Polo tanto

$$\oint_S (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} = -\int_V \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E}_1 \, dv = -I^2 R$$

que coincide con (2.2), tendo en conta que os campos son estáticos e polo tanto o término de variación da enerxía é cero.

Considerando, no caso xeneral, que a integral de superficie de (2.1) sigue sendo a potencia que sale pola superfice, a outra integral de volumen debe ser a potencia *que queda no volumen*. Supoñendo que o proceso é puramente electromagnético e as funciós $\mathbf{E}(\mathbf{D})$ e $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ son univaluadas, esta debe ser a variación con respecto ó tempo da enerxía electromagnética U contida no volumen V.

$$\frac{dU}{dt} = \iiint_V \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dv, \qquad (2.4)$$

Esta suposición é consistente co caso *cuasiestático*. Nun proceso suficientemente lento pra que os campos correspondan ó seu valor estático, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ decaen coa distancia como $1/r^2$ ou máis rápidamente. Facendo que o volumen de integración se extenda a todo o espacio (V_∞), a integral

[2] Non se confunda o símbolo co da conductividade, tamén usado neste exemplo.

de superficie tende a cero. Neste caso:

$$\int_{V_\infty}\left(\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)dv+\int_V \mathbf{J}_f\cdot\mathbf{E}\,dv=0 \tag{2.5}$$

A segunda integral exténdese ó volumen onde hai correntes e representa o traballo (2.2),

Como en (2.4) o volumen é arbitrario, o integrando é a variación local [3] da suma das derivadas das densidade de enerxía eléctrica u_e e magnética u_m, que serían:

$$\frac{\partial u_e}{\partial t}=\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\qquad \frac{\partial u_m}{\partial t}=\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.6}$$

Se o medio é o o espacio libre ou un *material lineal*, por integración no tempo obtéñense as densidades de enerxía

$$u_e=\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\qquad u_m=\frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} \tag{2.7}$$

e no espacio libre

$$u_e=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\qquad u_m=\frac{1}{2\nu_0}B^2 \tag{2.8}$$

Teorema de Poynting.

Se non se impoñen limitaciós á variación dos campos, debemos escribir:

$$\oint_S(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{a}+\int_V \mathbf{J}_f\cdot\mathbf{E}\,dv+\int_V\left(\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)dv=0 \tag{2.9}$$

Xa que o último término representa a velocidade de variación de enerxías eléctrica e magnética e o segundo a potencia disipada polo campo no volumen, o primeiro debe ser a que se transfire ó exterior a través da superficie. Defínese o *vector de Poynting* $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. En forma diferencial a última ecuación resulta:

$$\nabla\cdot\mathbf{S}+\mathbf{J}_f\cdot\mathbf{E}+\frac{\partial u}{\partial t}=0, \tag{2.10}$$

onde $u = u_e + u_m$; se se anula o término disipativo $\mathbf{J}_f\cdot\mathbf{E}$, queda

$$\nabla\cdot\mathbf{S}+\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

que é unha ecuación de continuidade, e permite interpretar **S** como unha densidade de corrente de enerxía electromagnética, e dicir, o campo vectorial que dá a *intensidade do fluxo de enerxía electromagnética* nun punto.

Se nas ecuaciós de Maxwell introducimos as fontes magnéticas (1.30), o teorema de conservación da enerxía queda como

$$\oint_S(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{a}+\int_V\left(\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)dv+\int_V\left(\mathbf{J}_f\cdot\mathbf{E}+\mathcal{M}_f\cdot\mathbf{H}\right)dv=0 \tag{2.11}$$

En vez de (2.2), o término de potencia resulta:

[3] Interpretando os campos **E** e **H** como *tensiós xeneralizadas* de tipo eléctrico e magnético respectivamente, sendo **D** e **B** os correspondentes desplazamentos xeneralizados.

$$P = \frac{dW}{dt} = \int_V \left(\mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} + \mathcal{M}_f \cdot \mathbf{H} \right) dv \tag{2.12}$$

UNICIDADE DA SOLUCIÓN DAS ECUACIÓS DE MAXWELL

Supoñamos un volumen V nun medio lineal, limitado por unha superficie cerrada S, e que están fixadas as fontes libres ρ_f e $\mathbf{J}_f$. Dadas $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}\big|_S$ ou $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}\big|_S$ (o que equivale a conocer as compoñentes tanxenciales dos respectivos campos na superficie), o campo electromagnético está determinado no volumen V.

Demostrarémolo no caso dun medio lineal isótropo. Consideraremos dous campos ($\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$) e ($\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$) que cumplen as ecuaciós de Maxwell, coas densidades de carga e corrente dadas. Supoñamos que nun certo instante $t = 0$ coinciden. A súa diferencia ($\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$) tamén as cumplirá, polo tanto élle aplicable o teorema de Poynting. En medios isótropos:

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2 + \mu H^2 \right) dv + \int_V \sigma E^2 dv = -\oint_S \left(\mathbf{E} \times \mathbf{H} \right) \cdot d\mathbf{a} \tag{2.13}$$

Se $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1\big|_S = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_2\big|_S$, teremos que $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}\big|_S = 0$, e outro tanto pasa con $\mathbf{H}$. En calquera caso a integral de superficie do vector de Poynting será cero. Como nin E^2 nin H^2 póden ser negativos, e en $t = 0$ son cero, a única posibilidade de que se cumpla (2.9) é que tanto $\mathbf{E}$ como $\mathbf{H}$ sean cero, polo tanto $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$ e $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$.

Se o medio é anisótropo, os tensores ε, μ e σ serán polo menos definidos positivos. Polo tanto os integrandos das integrales de volumen de (2.7) non se póden anular a menos que $\mathbf{E} = 0$ e $\mathbf{H} = 0$, e chegamos ó mesmo resultado.

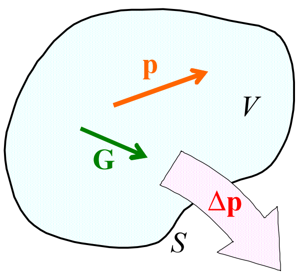

Fig. 2.3

MOMENTO ELECTROMAGNÉTICO. TENSOR DE MAXWELL

A forza de Lorentz volúmica

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

actuando sobre as cargas contidas nun volumen V produce unha variación do momento mecánico dada por

$$\frac{d\mathbf{p}_{mec}}{dt} = \int_V (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dv = \int_V \left[\varepsilon_0 \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} \right] dv \tag{2.14}$$

Como

$$\frac{\partial (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

e podemos sumar $\nabla \cdot \mathbf{B}$ (sempre é cero):

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{p}_{mec} + \varepsilon_0 \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} \, dv \right) = \int_V \left[\varepsilon_0 (\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B}) \right] dv .$$

Analicemos a parte eléctrica do segundo membro. En primeiro lugar, podemos desenrolar o gradente de $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = E^2$ e poñer a integral do gradente como unha integral de superficie:

$$\int_V \mathbf{E}\times\nabla\times\mathbf{E}\,dv = \int_V\left[\frac{1}{2}\nabla E^2 - (\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E}\right]dv = \frac{1}{2}\oint_S E^2\hat{\mathbf{n}}\,da - \int_V (\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E}\,dv$$

Por medio da identidade vectorial (fórmula de integración por partes)

$$\int_V\left[(\mathbf{E}\cdot\nabla)\,\mathbf{E}+\mathbf{E}\,\nabla\cdot\mathbf{E}\right]dv = \oint_S \mathbf{E}\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E})\,da = \oint_S(\mathbf{E}\otimes\mathbf{E})\,\hat{\mathbf{n}}\,da$$

convertemos o resto noutra nunha interal de superficie. O resultado é:

$$\int_V(\mathbf{E}\nabla\cdot\mathbf{E}-\mathbf{E}\times\nabla\times\mathbf{E})dv = \oint_S\left(\mathbf{E}\otimes\mathbf{E}-\frac{1}{2}\mathbf{I}\right)\hat{\mathbf{n}}\,da$$

(**I** é o tensor identidade). Coa parte magnética facemos outro tanto. Definimos o *tensor de tensiós de Maxwell*:

$$\mathbf{T}=\varepsilon_0\left(\mathbf{E}\otimes\mathbf{E}-\frac{1}{2}E^2\mathbf{I}\right)+\frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{B}\otimes\mathbf{B}-\frac{1}{2}B^2\mathbf{I}\right) \tag{2.15}$$

que é suma dunha parte eléctrica e outra magnética independentes. Con esto queda

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p}_{mec}+\varepsilon_0\int_V\mathbf{E}\times\mathbf{B}\,dv\right)=\oint_S\mathbf{T}\hat{\mathbf{n}}\,da \tag{2.16}$$

Igual ca se fixo antes coa enerxía, a integral de superficie do tensor de Maxwell póde ser interpretada como a forza *electromagnética* que o campo electromagnético exerce sobre o volumen. Pero queda un término con dimensiós de momento e de naturaleza electromagnética,

$$\mathbf{G}=\varepsilon_0\int_V(\mathbf{E}\times\mathbf{B})dv\,, \tag{2.17}$$

que é o *momento electromagnético*. A cantidade

$$\mathbf{g}=\varepsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B}=\frac{1}{c^2}\mathbf{S} \tag{2.18}$$

é a *densidade de momento electromagnético*.

Parte de forza (2.17) exercida sobre a superficie S resulta nun incremento do momento electromagnético. A forza **F** que actúa sobre as cargas, e dá lugar á variación do momento mecánico $\mathbf{p}_{mec}$ (a forza de Lorentz de 2.16) é a diferencia:

$$\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{p}_{mec}}{dt}=\oint_S\mathbf{T}\hat{\mathbf{n}}da-\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int_V\mathbf{E}\times\mathbf{B}\,dv \tag{2.19}$$

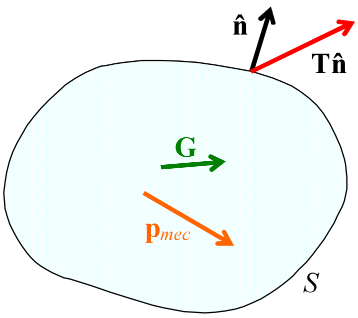

Fig. 2.4

FORZAS SOBRE MEDIOS MATERIALES

Valores propios e direcciós principales do tensor de Maxwell

No espacio libre e en medios lineales isótropos o tensor de Maxwell é *simétrico*, logo tén valores propios reales. Tén interés práctico o estudio destes autovalores en campos cuasiestáticos eléctricos ou magnéticos. Estudiarémolos vendo por separado as partes eléctrica e magnética do tensor de Maxwell. Prá primeira:

$$\mathbf{T}^{(E)}=\varepsilon\left(\mathbf{E}\otimes\mathbf{E}-\frac{1}{2}E^2\,\mathbf{I}\right) \tag{2.20}$$

O término $\varepsilon(\mathbf{E}\otimes\mathbf{E})\hat{\mathbf{n}} = \varepsilon(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}$ tén a dirección do campo eléctrico. O outro é sempre normal á superficie. As únicas posibilidades de que $\mathbf{T}_f^{(E)}\hat{\mathbf{n}}$ sea normal á superficie son:

$$\begin{aligned} a)\quad & \mathbf{E}\parallel\hat{\mathbf{n}} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{T}^{(E)}\hat{\mathbf{n}} = \frac{\varepsilon E^2}{2}\hat{\mathbf{n}} \\ b)\quad & \mathbf{E}\perp\hat{\mathbf{n}} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{T}^{(E)}\hat{\mathbf{n}} = -\frac{\varepsilon E^2}{2}\hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Coa parte magnética

$$\mathbf{T}^{(M)} = \frac{1}{\mu}\left(\mathbf{B}\otimes\mathbf{B} - \frac{1}{2}B^2\,\mathbf{I}\right) \tag{2.22}$$

temos os mesmos casos:

$$\begin{aligned} c)\quad & \mathbf{B}\parallel\hat{\mathbf{n}} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{T}^{(M)}\hat{\mathbf{n}} = \frac{B^2}{2\mu}\hat{\mathbf{n}} \\ d)\quad & \mathbf{B}\perp\hat{\mathbf{n}} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{T}^{(M)}\hat{\mathbf{n}} = -\frac{B^2}{2\mu}\hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Presión eléctrica e magnética sobre conductores.

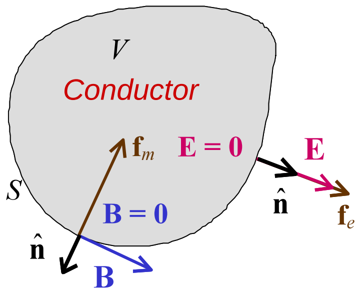

Fig. 2.5

Nos conductores perfectos solo hai cargas e correntes *libres*, polo que as forzas sobre eles póden ser calculadas por medio do tensor de Maxwell (2.15). Nun conductor perfecto o campo eléctrico é cero. Tamén o campo magnético, excluindo unha posible compoñente constante, se debe anular. Polas condiciós de fronteira (1.15):

1. O campo eléctrico na superficie debe ser normal. Logo a forza $\mathbf{f}_e$ por unidade de área tamén é normal (caso *a*) e vai dirigida cara a fóra. Como consecuencia, o conductor será atraído á zona de campo máis intenso.

2. O campo magnético na superficie é paralelo a ela. A forza sigue sendo normal, pero dirixida cara a dentro, según (*d*). Logo a forza magnética tenderá a botar o conductor fóra da zona de campo máis intenso [4].

MOMENTO CANÓNICO.

A enerxía cinética (non relativista) dunha partícula é

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}$$

Nun potencial magnético $\mathbf{A}$ a partícula tería unha enerxía electromagnética

$$U = \frac{1}{2}\int_{V_\infty}\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}\,dv = \frac{1}{2}q\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}$$

[4] Esta é a explicación da levitación magnética dos superconductores. Tamén os conductores ordinarios se póden facer levitar nun campo magnético alterno de frecuencia suficientemente alta, porque as correntes inducidas impiden que o campo entre o conductor.

da mesma forma ca a enerxía cinética, se supoñemos que no momento existe un término adicional $q\mathbf{A}$ debido ó potencial magnético. Basándose nesto, defínese o *momento canónico*

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + q\mathbf{A} \tag{2.24}$$

que é unha constante do movemento dunha partícula nun campo electromagnético. Desta maneira podemos escribir a enerxía da partícula nun campo electromagnético como

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{u} + q\left(\phi + \frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}\right) \tag{2.25}$$

MOMENTO ANGULAR ELECTROMAGNÉTICO.

Dado calquera tensor $\mathbf{T}$, o tensor $\mathbf{r}\times\mathbf{T}$ definido por $(\mathbf{r}\times\mathbf{T})\,\mathbf{u} = \mathbf{r}\times(\mathbf{T}\,\mathbf{u})$ cumple

$$\nabla\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{T}) = \mathbf{r}\times\nabla\cdot\mathbf{T}$$

Unha consecuencia deste teorema é que

$$\int_V \mathbf{r}\times\nabla\cdot\mathbf{T}\,dv = \oint_S \mathbf{r}\times\mathbf{T}\hat{\mathbf{n}}\,da$$

Se en (2.16) desenrolamos o momento mecánico e escribimos a integral de superficie como a integral da diverxencia no volumen

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V \rho_m\mathbf{v}\,dv + \varepsilon_0\int_V \mathbf{E}\times\mathbf{B}\,dv\right) = \oint_S \nabla\cdot\mathbf{T}\,da \tag{2.16 b}$$

(ρ_m é a densidade de masa, e $\mathbf{v}$ o campo de velocidades) e multiplicamos vectorialmente os integrandos por $\mathbf{r}$, temos

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{L}_{mec} + \varepsilon_0\int_V \mathbf{r}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\,dv\right) = \int_V \mathbf{r}\times\nabla\cdot\mathbf{T}\,dv \tag{2.26}$$

Polo dito antes, a integral da direita convértese nunha integral de superficie. Así chegamos ó teorema de conservación do momento angular:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_{mec} + \mathbf{L}_{em}) = \oint_S \mathbf{r}\times\mathbf{T}\hat{\mathbf{n}}\,da \tag{2.27}$$

definindo o momento angular electromagnético $\mathbf{L}_{em}$ como

$$\mathbf{L}_{em} = \int_V \mathbf{r}\times\mathbf{g}\,dv = \varepsilon_0\int_V \mathbf{r}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\,dv = \varepsilon_0\int_V [\mathbf{E}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{E})]\,dv \tag{2.28}$$